国家中小学课程资源

21.2 解一元二次方程
——一元二次方程根的判别式（2）

年　级：九年级

学　科：数学（人教版）

主讲人：宋　微

学　校：北京市第十三中学分校

复习回顾

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$.

当 $\Delta=b^2-4ac>0$ 时，方程有两个不相等的实数根;

当 $\Delta=b^2-4ac=0$ 时，方程有两个相等的实数根.

当 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时，方程没有实数根;

引入新知

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$,

方程有两个不相等的实数根，则 $\Delta=b^2-4ac$ ______ 0;

方程有两个相等的实数根，则 $\Delta=b^2-4ac$ ______ 0;

方程没有实数根，则 $\Delta=b^2-4ac$ ______ 0.

由一元二次方程求根公式的推导过程可知

$$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2,$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

当 $b^2-4ac\geq 0$ 时，方程的实数根为

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

引入新知

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$.

方程有两个不相等的实数根，则 $\Delta=b^2-4ac$ __>__ 0;

方程有两个相等的实数根，则 $\Delta=b^2-4ac$ __=__ 0;

方程没有实数根，则 $\Delta=b^2-4ac$ __<__ 0.

例1 如果关于x的一元二次方程 $x^2-4x+k-5=0$ 有两个不相等的实数根，求k的取值范围.

$\Delta=b^2-4ac>0$

解：$a=1,\quad b=-4,\quad c=k-5.$

$$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times1\times(k-5)$$
$$=16-4k+20$$
$$=36-4k.$$

$\because$ 一元二次方程有两个不相等的实数根，

$\therefore\quad 36-4k>0.$

$\therefore\quad k<9.$

变式1 如果关于x的一元二次方程 $x^2-4x+k-5=0$ 有两个相等的实数根，求k的取值范围.

变式2 如果关于x的一元二次方程 $x^2-4x+k-5=0$ 没有实数根，求k的取值范围.

变式1 如果关于x的一元二次方程 $x^2-4x+k-5=0$ 有两个相等的实数根，求k的取值范围.

$\Delta=b^2-4ac=0$

解：∵一元二次方程有两个相等的实数根，

$\therefore\ \Delta=b^2-4ac$

$=36-4k=0.$

$\therefore\ k=9.$

变式2 如果关于x的一元二次方程 $x^2-4x+k-5=0$ 没有实数根，求k的取值范围.

$\Delta=b^2-4ac<0$

解：$\because$ 一元二次方程没有实数根，

$\therefore \Delta=b^2-4ac$

$=36-4k<0.$

$\therefore \quad k>9.$

变式3 如果关于x的一元二次方程 $x^2-4x+k-5=0$ 有实数根，求k的取值范围.

$\Delta=b^2-4ac\geq 0$

解：$\because$一元二次方程有实数根，

$\therefore \Delta=b^2-4ac$

$=36-4k\geq 0.$

$\therefore \quad k\leq 9.$

例2　若关于x的方程$(a-1)x^2+2(a+1)x+a+5=0$有两个实数根，求正整数a的值.

解：根据题意，得$\begin{cases} a-1\neq 0, \\ \Delta\geq 0, \\ a\text{为正整数}. \end{cases}$

$\because a-1\neq 0$

$\therefore a\neq 1$

由　$\Delta\geq 0$　得　$\Delta=[2(a+1)]^2-4(a-1)(a+5)$

$=4a^2+8a+4-4a^2-16a+20$

$=-8a+24\geq 0.$

所以　$a\leq 3.$

因为$a\neq 1$, a为正整数,

所以　$a=2$或$a=3.$

例3 关于x的一元二次方程 $ax^2+2ax+c=0$,

若方程有两个相等的实数根，请比较a,c的大小，并说明理由.

$\Delta=0$

解：由题意，得 $\begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta=0 \end{cases}$

$\because \Delta=(2a)^2-4ac=0,$

$\therefore 4a^2-4ac=0.$

$\therefore 4a(a-c)=0.$

$\because a\neq 0,$

$\therefore a-c=0.$

$\therefore a=c.$

例4 已知：关于x的方程 $mx^2-4x+1=0$ 有实数根.

（1）求m的取值范围；

（2）若方程的根为有理数，求正整数m的值.

例4 已知：关于x的方程 $mx^2-4x+1=0$ 有实数根.

（1）求m的取值范围；

解：（1）①当$m=0$ 时，方程为 $-4x+1=0$，方程有一个实数根；

②当$m\neq 0$ 时，方程为一元二次方程.

$$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times m\times 1=16-4m.$$

∵一元二次方程有实数根，

∴ $16-4m\geq 0$.

$m\leq 4$.

∴m的取值范围是$m\leq 4$且 $m\neq 0$.

综上所述，$m\leq 4$.

例4 已知：关于x的方程 $mx^2-4x+1=0$ 有实数根.

（2）若方程的根为有理数，求正整数m的值.

（2）解：$\because$ m为正整数，

$\therefore m$可取1，2，3，4.

$\therefore$ $m\neq0$, 方程为一元二次方程.

分析 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)\left(\Delta\geq0\right)$.

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

例4 已知：关于x的方程$mx^2-4x+1=0$有实数根.

（2）若方程的根为有理数，求正整数m的值.

（2）解：$\because m\leqslant 4$且m为正整数，

$\therefore m$可取1，2，3，4.

当$m=1$时，$\Delta=16-4m=12, \sqrt{\Delta}=2\sqrt{3}$;

当$m=2$时，$\Delta=16-4m=8, \sqrt{\Delta}=2\sqrt{2}$;

当$m=3$时，$\Delta=16-4m=4, \sqrt{\Delta}=2$;

当$m=4$时，$\Delta=16-4m=0, \sqrt{\Delta}=0$.

$\because$方程为有理根，

$\therefore \sqrt{\Delta}$为有理数.

$\therefore m=3$或$m=4$.

$\therefore$当m的值为3或4时，方程的根为有理数.

例5．已知关于x的方程 $mx^2+(2m-1)x+m-1=0(m\neq 0)$.

（1）求证：方程总有两个不相等的实数根；

（2）若方程的两个实数根都是整数，求整数m的值．

（1）证明：$\because \Delta=(2m-1)^2-4m(m-1)$

$$=4m^2-4m+1-4m^2+4m$$

$$=1>0.$$

所以方程总有两个不相等的实数根.

例5. 已知关于x的方程 $mx^2+(2m-1)x+m-1=0(m\neq 0)$

（1）求证：方程总有两个不相等的实数根；

（2）若方程的两个实数根都是整数，求整数m的值.

（2）解：$\because \Delta=1,$

$$\therefore x=\frac{-(2m-1)\pm 1}{2m}.$$

$$\therefore x_1=\frac{-2m+1+1}{2m},x_2=\frac{-2m+1-1}{2m}.$$

$$\therefore x_1=\frac{-m+1}{m},x_2=-1.$$

$$\therefore x_1=-1+\frac{1}{m},x_2=-1.$$

例5．已知关于x的方程 $mx^2+(2m-1)x+m-1=0(m\neq 0)$

（1）求证：方程总有两个不相等的实数根；

（2）若方程的两个实数根都是整数，求整数m的值．

（2）解：$x_1=-1+\dfrac{1}{m}, x_2=-1.$

因为方程的两个实数根都是整数，且m为整数，

$\therefore m=\pm 1.$

例6 如果关于x的一元二次方程 $a\left(1+x^2\right)+2bx=c\left(1-x^2\right)$ 有两个相等的实数根，判断以正数a，b，c为边长的三角形的形状.

解： $a\left(1+x^2\right)+2bx=c\left(1-x^2\right)$,

$a+ax^2+2bx=c-cx^2$,

$ax^2+cx^2+2bx+a-c=0$,

整理，得 $(a+c)x^2+2bx+a-c=0$.

例6 如果关于x的一元二次方程 $a\left(1+x^{2}\right)+2bx=c\left(1-x^{2}\right)$ 有两个相等的实数根，判断以正数a，b，c为边长的三角形的形状.

解：$$\left(a+c\right)x^{2}+2bx+a-c=0.$$

$\because$ a，b，c为正数，$\therefore$ $a+c\neq 0.$

$\because$ 此一元二次方程有两个相等实数根，

$$\therefore \quad \Delta=\left(2b\right)^{2}-4\left(a+c\right)\left(a-c\right)$$

$$=4b^{2}-4a^{2}+4c^{2}=0.$$

$$\therefore \quad 4a^{2}=4b^{2}+4c^{2}.$$

$$\therefore \quad a^{2}=b^{2}+c^{2}.$$

所以以正数a，b，c为边长的三角形的形状为直角三角形.

课堂小结

1. 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 根的判别式和方程根的情况之间的关系:

$\Delta=b^2-4ac>0$ ⟷ 方程有两个不相等实数根;

$\Delta=b^2-4ac=0$ ⟷ 方程有两个相等实数根;

$\Delta=b^2-4ac<0$ ⟷ 方程无实数根.

2. 在运用判别式解决问题时先判断方程类型，根据根的情况，以及待定系数的限定条件，解决相应问题.

布置作业

1. 已知关于x的一元二次方程 $x^2-2x+n=0$ 有两个相等的实数根，求n的值.

2．已知关于x的一元二次方程$kx^2-4x+3=0$ 有两个不相等的实数根,求k的取值范围.

国家中小学课程资源

同学们，再见！