

国家中小学课程资源

第八章 实数

8.1 平方根

第 3 课时

年 级：七年级

主讲人：白 成

学 科：数学（人教版）

学 校：北京大学附属中学





新课导入

回顾 估计 $\sqrt{2}$ 的范围的方法.

可以按如下过程用有理数估计无理数 $\sqrt{2}$ 的范围.

因为 $1^2=1$, $2^2=4$, $1^2<2<2^2$, 所以 $1<\sqrt{2}<2$;

因为 $1.4^2=1.96$, $1.5^2=2.25$, $1.4^2<2<1.5^2$, 所以 $1.4<\sqrt{2}<1.5$;

因为 $1.41^2=1.9881$, $1.42^2=2.0164$, $1.41^2<2<1.42^2$, 所以 $1.41<\sqrt{2}<1.42$;

因为 $1.414^2=1.999396$, $1.415^2=2.002225$, $1.414^2<2<1.415^2$,
所以 $1.414<\sqrt{2}<1.415$;

.....

如此进行下去，可以得到 $\sqrt{2}$ 的更精确的估计范围。

事实上， $\sqrt{2}=1.414\ 213\ 562\ 373\cdots$ ，它是一个无限不循环小数。

实际上，很多正有理数的算术平方根（例如 $\sqrt{3}$ ， $\sqrt{5}$ ， $\sqrt{6}$ 等）都是无限不循环小数。因此都可以使用夹逼的方法估计它们的范围，并得到近似值。

追问 这个计算过程看起来较为繁琐，有没有更高效的方法呢？

用计算器求正有理数的算术平方根（或其近似值）。

新知探究

问题 1 如何用计算器求一个正有理数的算术平方根（或其近似值）？

例 1 用计算器求下列各式的值：

(1) $\sqrt{3136}$; (2) $\sqrt{2}$ (结果保留小数点后三位) .

解：(1) 依次按键 $\sqrt{\square}$ ③ ① ③ ⑥ $=$,

显示：56.

所以 $\sqrt{3136} = 56$.

使用计算器时需注意：不同品牌的计算器，按键顺序可能有所不同。



新知探究

问题 1 如何用计算器求一个正有理数的算术平方根（或其近似值）？

例 1 用计算器求下列各式的值：

(1) $\sqrt{3136}$ ；

(2) $\sqrt{2}$ （结果保留小数点后三位）。

解：（2）依次按键 $\sqrt{\square}$ $\textcircled{2}$ $\textcircled{=}$ ，

显示：1.414213562.

所以 $\sqrt{2} \approx 1.414$.

问题 2 当“天问一号”火星探测器的速度大于第二宇宙速度 v （单位：m/s）时，它就会克服地球引力，永远离开地球，飞向火星。 v 的大小满足 $v^2=2gR$ ，其中 g 是地球表面的重力加速度， $g\approx 9.8$ （单位：m/s²）， R 是地球半径， $R\approx 6.4\times 10^6$ （单位：m）。怎样求 v 呢？

追问 1 v 的大小满足什么关系式？这个关系式中涉及哪些量？

v 的大小满足关系式 $v^2=2gR$ ，这个关系式中还涉及地球表面的重力加速度 g 和地球半径 R 。

追问 2 你能用重力加速度 g 和地球半径 R 表示出 v 吗?

根据 $v^2=2gR$ 及 v 的实际意义, 可得 $v=\sqrt{2gR}$.

追问 3 哪些量是已知的？怎样求 v 呢？

$g \approx 9.8$ （单位： m/s^2 ）， $R \approx 6.4 \times 10^6$ （单位： m ）。

因此 $v \approx \sqrt{2 \times 9.8 \times 6.4 \times 10^6}$ ，

这个表达式较为复杂，可以用计算器求得 $v \approx 1.12 \times 10^4$ 。

因此，第二宇宙速度 v 约为 $1.12 \times 10^4 \text{ m/s}$ ，即 11.2 km/s 。

总结

计算器是很好的工具，可以让我们方便、快捷地计算一些复杂的算式，从而让我们专注于解决问题本身，而不是具体的计算。

探究 用计算器不仅可以更好地解决实际问题，也能帮助我们探究数学规律。

(1) 用计算器计算下表中的算术平方根，并将计算结果填在表中，你发现了什么规律？

...	$\sqrt{0.0625}$	$\sqrt{0.625}$	$\sqrt{6.25}$	$\sqrt{62.5}$	$\sqrt{625}$	$\sqrt{6\,250}$	$\sqrt{62\,500}$	...
...	0.25	0.791	2.5	7.91	25	79.1	250	...

...	$\sqrt{0.0625}$	$\sqrt{0.625}$	$\sqrt{6.25}$	$\sqrt{62.5}$	$\sqrt{625}$	$\sqrt{6\,250}$	$\sqrt{62\,500}$	...
...	0.25	0.791	2.5	7.91	25	79.1	250	...

追问 1 这些算术平方根有什么规律？

从运算结果可以发现，每隔一个数，算术平方根的小数点会向右移动一位。也就是说，被开方数的小数点向右移动 2 位，它的算术平方根的小数点就相应地向右移动 1 位。

...	$\sqrt{0.0625}$	$\sqrt{0.625}$	$\sqrt{6.25}$	$\sqrt{62.5}$	$\sqrt{625}$	$\sqrt{6\,250}$	$\sqrt{62\,500}$	...
...	0.25	0.791	2.5	7.91	25	79.1	250	...

追问 2 如果被开方数的小数点向左移动 2 位，也有类似的规律吗？

有。如果被开方数的小数点向左移动 2 位，它的算术平方根的小数点就相应地向左移动 1 位。

(2) 用计算器计算 $\sqrt{3}$ (结果保留小数点后三位), 并利用你在 (1) 中发现的规律求出 $\sqrt{0.03}$, $\sqrt{300}$, $\sqrt{30\,000}$ 的近似值, 你能根据 $\sqrt{3}$ 的值求出 $\sqrt{30}$ 的近似值吗?

使用计算器可得 $\sqrt{3} \approx 1.732$.

$\sqrt{3}$	$\sqrt{0.03}$	$\sqrt{300}$	$\sqrt{30\,000}$
1.732	0.173 2	17.32	173.2

(2) 用计算器计算 $\sqrt{3}$ (结果保留小数点后三位), 并利用你在 (1) 中发现的规律求出 $\sqrt{0.03}$, $\sqrt{300}$, $\sqrt{30000}$ 的近似值, 你能根据 $\sqrt{3}$ 的值求出 $\sqrt{30}$ 的近似值吗?

从 3 到 30, 由于被开方数的小数点移动的位数为奇数位, 所以不能由 $\sqrt{3}$ 的值直接推出 $\sqrt{30}$ 是多少. 我们可以通过进一步挖掘 (1) 中的规律来解决这个问题.

(2) 用计算器计算 $\sqrt{3}$ (结果保留小数点后三位), 并利用你在 (1) 中发现的规律求出 $\sqrt{0.03}$, $\sqrt{300}$, $\sqrt{30\,000}$ 的近似值, 你能根据 $\sqrt{3}$ 的值求出 $\sqrt{30}$ 的近似值吗?

可以发现, 当被开方数的小数点每向右移动 1 位时, 它的算术平方根会变成原来算术平方根的约 3.16 倍. 因此, 根据 $\sqrt{3}$ 的值, 可估计 $\sqrt{30}$ 的近似值为 $1.732 \times 3.16 \approx 5.5$.

例 2 小丽想用一块面积为 400 cm^2 的正方形纸片，沿着边的方向裁出一块面积为 300 cm^2 的长方形纸片，使它的长与宽的比为 $3:2$ 。但她不知道能否裁得出来，正在发愁，小明见了说：“别发愁，一定能用一块面积大的纸片裁出一块面积小的纸片！”

你同意小明的说法吗？小丽能用这块纸片裁出想要的纸片吗？

如何判断能否裁出想要的纸片？

通过比较正方形纸片的边长和长方形纸片的长即可判断。如果长方形纸片的长不大于正方形纸片的边长，则可以裁得出来；如果长方形纸片的长大于正方形纸片的边长，则不能裁出来。

追问 1 你能求出正方形纸片的边长吗？

正方形纸片的面积为 400 cm^2 ，因为 $\sqrt{400} = 20$ ，所以正方形纸片的边长为 20 cm 。

追问 2 如何求长方形纸片的长?

可以用列方程求解的方法.

设长方形纸片的长为 $3x$ cm, 宽为 $2x$ cm. 根据长和宽与面积的关系, 得

$$3x \cdot 2x = 300,$$

$$6x^2 = 300,$$

$$x^2 = 50.$$

由长的实际意义, 得 $x = \sqrt{50}$.

备注: $3\sqrt{50}$ 就是 $3 \times \sqrt{50}$.

因此长方形纸片的长为 $3\sqrt{50}$ cm.

追问 3 如何比较 $3\sqrt{50}$ 和 20 的大小？

有两种方法：**估计算术平方根的大小**，或直接用计算器计算。

方法 1：被开方数越大，对应的算术平方根就越大。这个结论对所有正数都成立。

由此可知，因为 $50 > 49$ ，所以 $\sqrt{50} > 7$ ，

由上可知 $3\sqrt{50} > 21$ ，所以 $3\sqrt{50} > 20$ 。

所以长方形纸片的长将大于正方形纸片的边长，这说明不能同意小明的说法，小丽不能用这块纸片裁出想要的纸片。

追问 3 如何比较 $3\sqrt{50}$ 和 20 的大小？

有两种方法：估计算术平方根的大小，或直接用计算器计算。

方法 2：用计算器可计算得 $3\sqrt{50} \approx 21.21$ ，

因此 $3\sqrt{50} > 21$ ，所以 $3\sqrt{50} > 20$ 。

同样也可以得到长方形纸片的长将大于正方形纸片的边长，
结论同上。

经验总结：用面积大的纸片不一定能裁出一块符合问题要求的面积小的纸片。



拓展提升

问题 3 任意找一个正数，比如 1 234，利用计算器对它开平方，再对得到的算术平方根开平方……如此进行下去，你有什么发现？

$$\sqrt{1\,234} \approx 35.128, \sqrt{35.128} \approx 5.927, \sqrt{5.927} \approx 2.435, \sqrt{2.435} \approx 1.560,$$

$$\sqrt{1.560} \approx 1.249, \sqrt{1.249} \approx 1.118, \sqrt{1.118} \approx 1.057, \sqrt{1.057} \approx 1.028,$$

.....

由此可发现，随着进行的次数变多，所得结果逐渐减小，并越来越接近 1.

问题 3 任意找一个正数，比如 1 234，利用计算器对它开平方，再对得到的算术平方根开平方……如此进行下去，你有什么发现？

同理考虑其他情形，我们得到：

对于 1，每次开平方所得的算术平方根均为 1；

对于小于 1 的正数，每次开平方所得的算术平方根逐渐增大，并趋近于 1；

对于大于 1 的正数，每次开平方所得的算术平方根逐渐减小，并趋近于 1.



课堂小结

请同学们回顾本节课所学内容，思考下面的问题并回答：

(1) 如何用计算器求一个正有理数的算术平方根（或其近似值）？

使用 $\sqrt{\square}$ 键，按正确的顺序依次按键即可。不同品牌的计算器，按键顺序可能有所不同。

(2) 如何用计算器探究算术平方根的一些性质？

使用计算器辅助数学研究，可以使计算更高效，从而帮助我们探究数的规律，发现算术平方根的性质。

(3) 在解决实际问题中，如何按问题的要求进行简单的近似计算？

既可以用数学方法估算，也可以使用计算器进行计算。



课后任务

教科书习题 8.1 第 4, 5, 7 题.

国家中小学课程资源

第八章 实数

8.1 平方根

第 3 课时

制作单位：人民教育出版社

