国家中小学课程资源

21.2解一元二次方程
——一元二次方程根的判别式（1）

年　级：九年级　　学　科：数学（人教版）

主讲人：宋　徽　　学　校：北京市第十三中学分校

复习回顾

1.解一元二次方程的方法有：

直接开平方法，配方法，公式法，因式分解法.

2. 配方法和公式法是解一元二次方程的通法.

思考

一元二次方程的根的情况，由哪些因素决定呢?

一元二次方程求根公式的推导过程

$$ax^2+bx+c=0(a\neq 0).$$

解 两边同时除以a，得

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

移项，得

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}.$$

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}.$$

配方，得

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2,$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

因为 $a\neq 0$， 所以 $4a^2>0$.

当 $b^2-4ac\geq 0$ 时， $\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\geq 0.$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}.$$

方程有实数根.

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

由于 $a\neq 0$，所以$4a^2>0$.

当$b^2-4ac<0$ 时，

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}<0.$$

x取任何实数都不能使 $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2<0$，因此方程无实数根.

引入新知

一般地，式子b^2-4ac 叫做一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 根的判别式，通常用希腊字母“Δ”表示它，即 $\Delta=b^2-4ac$.

归纳

当 $b^2-4ac\geq 0$ 时，方程有实数根;

当 $b^2-4ac<0$ 时，方程没有实数根.

思考

在存在实数根的情况下，我们还能判断出实数根的什么情况呢?

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$

当 $\Delta=b^2-4ac>0$ 时，这时 $\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}>0.$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}.$$

方程有两个不相等实数根.

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$

当 $\Delta=b^2-4ac=0$ 时，$\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}=0.$

$$x_1=\frac{-b+0}{2a}, x_2=\frac{-b-0}{2a}.$$

方程有两个相等实数根.

$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}.$$

归纳

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 根的情况:

当 $b^2-4ac>0$ 时，方程有两个不相等的实数根;

当 $b^2-4ac=0$ 时，方程有两个相等的实数根;

当 $b^2-4ac<0$ 时，方程没有实数根.

例1 不求出一元二次方程的根，判断下列方程根的情况：

$\Delta = b^2 - 4ac$

（1） $2x^2 - 5x + 1 = 0$;

（2） $-2x^2 + x = 3x - 1$;

（3） $x + 2 = (x-2)(2x-1) + \frac{9}{2}$;

（4） $x^2 + 2\sqrt{2}x + 6 = 0$.

例1 不求出一元二次方程的根，判断下列方程根的情况：

（1） $2x^2-5x+1=0$;

解：（1） $a=2$, $b=-5$, $c=1$.

$\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4\times2\times1=25-8=17>0$.

$\therefore$此一元二次方程有两个不相等的实数根.

例1 不求出一元二次方程的根，判断下列方程根的情况：

(2) $-2x^2+x=3x-1$;

解： 化方程为 $2x^2+2x-1=0$.

$$a=2,\ b=2,\ c=-1.$$

$$\Delta=b^2-4ac=2^2-4\times2\times(-1)$$

$$=4+8=12>0.$$

$\therefore$ 此一元二次方程有两个不相等的实数根.

归纳

不解方程，判断一元二次方程根的情况的一般步骤：

（1）化一元二次方程为一般形式 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$;

（2）确定方程各项系数a，b及常数项c的值;

（3）将a，b，c的值代入判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 求值;

（4）根据 $\Delta=b^2-4ac$ 的值，判别方程根的情况.

例1 不求出一元二次方程的根，判断下列方程根的情况：

（3） $x+2=(x-2)(2x-1)+\dfrac{9}{2}$;

（4） $x^2+2\sqrt{2}x+6=0$.

（3） $x+2=(x-2)(2x-1)+\dfrac{9}{2}$;

解： 化方程为 $4x^2-12x+9=0.$

$a=4$, $b=-12$, $c=9.$

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2-4ac\\ &=(-12)^2-4\times4\times9\\ &=144-144=0.\end{aligned}$$

∴ 此一元二次方程有两个相等实数根.

（4）$x^2+2\sqrt{2}x+6=0.$

解： $a=1$，$b=2\sqrt{2}$， $c=6$.

$$\Delta=b^2-4ac=\left(2\sqrt{2}\right)^2-4\times1\times6$$

$$=8-24=-16<0.$$

∴ 此一元二次方程无实数根.

例2 在不解方程的情况下，判断下列关于x的一元二次方程

$mx^2-(2m+1)x+2=0\,(m\neq 0)$ 根的情况. $\Delta=b^2-4ac$

解： $a=m$， $b=-(2m+1)$， $c=2$.

$$
\begin{aligned}
\Delta=b^2-4ac&=\left[-(2m+1)\right]^2-4\times m\times 2\\
&=(2m+1)^2-8m\\
&=4m^2+4m+1-8m\\
&=4m^2-4m+1\\
&=(2m-1)^2\geq 0.
\end{aligned}
$$

$\Delta=b^2-4ac\geq 0$

分析

当$\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ 时，$\Rightarrow$?

分析

当 $\Delta=b^2-4ac>0$ 时，

一元二次方程有两个不相等的实数根；

当$\Delta=b^2-4ac\geq 0$ 时，

当$\Delta=b^2-4ac=0$ 时，

一元二次方程有两个相等的实数根.

分析

当$\Delta=b^2-4ac\geq 0$时，一元二次方程有两个实数根.

分析

当$\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ 时，一元二次方程有实数根.

例2 在不解方程的情况下，判断下列关于x的一元二次方程

$mx^2-(2m+1)x+2=0\,(m\neq 0)$ 根的情况.

解： $a=m$ ， $b=-(2m+1)$ ， $c=2$.

$$\begin{aligned}\Delta=b^2-4ac&=\left[-(2m+1)\right]^2-8m\\&=(2m+1)^2-8m\\&=4m^2+4m+1-8m\\&=4m^2-4m+1\\&=(2m-1)^2\geq 0.\end{aligned}$$

所以 $mx^2-(2m+1)x+2=0\,(m\neq 0)$ 有实数根.

例3 在不解方程的情况下，判断下列关于x的方程 $x^2-(m+2)x+m=0$ 根的情况.

$\Delta = b^2 - 4ac$

解： $a=1$， $b=-(m+2)$， $c=m$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (m+2)^2 - 4m$$

$$= m^2 + 4m + 4 - 4m$$

$$= m^2 + 4.$$

因为 $m^2 \geq 0$,

所以 $m^2 + 4 > 0$.

∴此一元二次方程有两个不相等的实数根.

例4 求证：不论k取何实数，关于x的一元二次方程 $x^2+(k-1)x+k-3=0$ 总有两个不相等的实数根.

$\Delta=b^2-4ac>0$

证明： $a=1$， $b=k-1, c=k-3$.

$$\Delta=b^2-4ac=(k-1)^2-4(k-3)$$

$$=k^2-2k+1-4k+12$$

$$=k^2-6k+13$$

$$=k^2-6k+9+4$$

$$=(k-3)^2+4.$$

因为 $(k-3)^2\geq 0,$

所以 $(k-3)^2+4>0.$

$\therefore$此一元二次方程有两个不相等的实数根.

小结

1.一元二次方程根的判别式的定义.

2.用一元二次方程根的判别式判别一元二次方程根的情况:

当 $b^2-4ac>0$ 时，方程有两个不相等的实数根;

当 $b^2-4ac=0$ 时，方程有两个相等的实数根;

当 $b^2-4ac<0$ 时，方程没有实数根.

小结

1.一元二次方程根的判别式的定义.

2.用一元二次方程根的判别式判别一元二次方程根的情况:

当 $b^2-4ac\geq 0$ 时，方程有两个实数根,
或方程有实数根;

当 $b^2-4ac<0$ 时，方程没有实数根.

布置作业

1.利用判别式判断下列方程的根的情况.

(1) $2x^2-3x-\dfrac{3}{2}=0$, (2) $16x^2-24x+\dfrac{9}{2}=0$,

(3) $x^2-4\sqrt{2}x+9=0$, (4) $3x^2+10=2x^2+8x$.

2. 在不解方程的情况下，判断关于x的一元二次方程 $x^2-4ax+3a^2=0$ 根的情况.

3.求证：不论m取何实数，关于x的方程 $x^2-(2m+1)x+2m=0$ 总有实数根.

国家中小学课程资源

同学们，再见！