

国家中小学课程资源

21.2.2公式法 (1)

年 级：九年级

主讲人：孙 涵

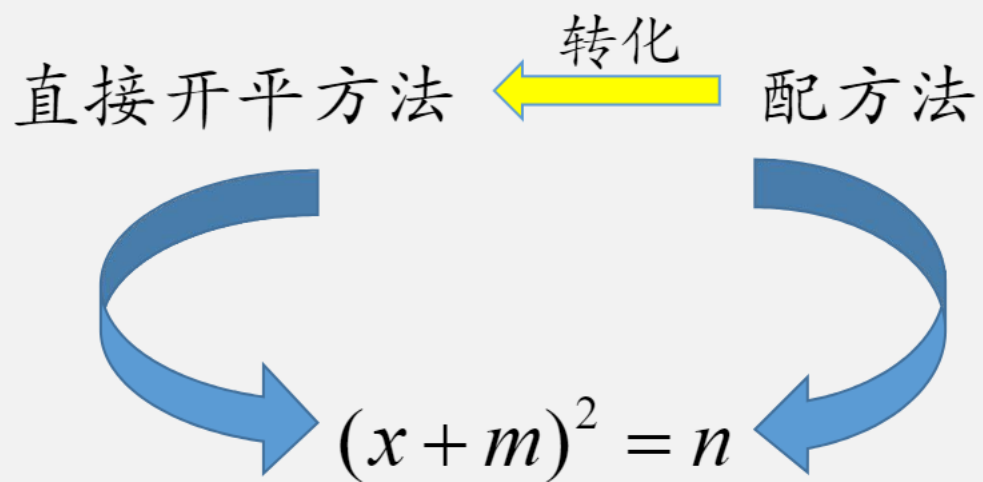
学 科：数学（人教版）

学 校：北京市第八中学



1. 复习回顾

问题1 请同学们回顾,在前面的学习中,学过哪些解一元二次方程的方法.



问题2 用配方法解方程 $5x^2 - 3x = x + 1$.

解：移项，得 $5x^2 - 4x = 1$.

二次项系数化为1，得 $x^2 - \frac{4}{5}x = \frac{1}{5}$.

配方，得 $x^2 - \frac{4}{5}x + (-\frac{2}{5})^2 = \frac{1}{5} + (-\frac{2}{5})^2$,

$$\downarrow \quad \quad \quad \swarrow$$
$$(x - \frac{2}{5})^2 = \frac{9}{25}.$$

由此可得 $x - \frac{2}{5} = \pm \frac{3}{5}$,

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -\frac{1}{5}.$$

2. 探究新知

问题3 你能不能也用配方法求出关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的解呢?


$$ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$$
$$(x + m)^2 = n$$

$$ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$$

$$(x + m)^2 = n$$

因为 $a \neq 0$
根据等式性质

解：移项，得

$$ax^2 + bx = -c.$$

二次项系数化为1，得

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}.$$

配方，得

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2,$$

一次项系数
一半的平方


$$ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$$

$$(x + m)^2 = n$$

配方，得

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2,$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2},$$


$$= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

配方，得 $(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$

$$(x + m)^2 = n$$

$n \geq 0$, 有两个实数根;

$n < 0$, 方程无实根.

$$4a^2$$

$$\because a \neq 0$$

$$\therefore 4a^2 > 0$$

$$b^2 - 4ac$$

$$(1) b^2 - 4ac > 0 \quad \text{则} \quad \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} > 0$$

$$(2) b^2 - 4ac = 0 \quad \text{则} \quad \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$$

$$(3) b^2 - 4ac < 0 \quad \text{则} \quad \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} < 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$(1) b^2 - 4ac > 0 \quad \text{这时} \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} > 0$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}}$$

由 $\sqrt{a^2} = |a|$ 性质

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|2a|}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|2a|}$$

由 $|a| = \pm a$ 性质

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$(1) b^2 - 4ac > 0 \quad \text{这时} \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} > 0,$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};$$

$$(2) b^2 - 4ac = 0 \quad \text{这时} \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0,$$

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = 0;$$

$$(3) b^2 - 4ac < 0 \quad \text{这时} \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} < 0,$$

所以方程无实数根.

总结 关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的根的情况:

(1) 当 $b^2 - 4ac > 0$ 时, 方程有两个不相等实数根

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};$$

(2) 当 $b^2 - 4ac = 0$ 时, 方程有两个相等实数根

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a};$$

(3) 当 $b^2 - 4ac < 0$ 时, 方程无实数根.

可见,式子 $b^2 - 4ac$ 决定了一元二次方程的根的情况.

当 $b^2 - 4ac > 0$ 及 $b^2 - 4ac = 0$ 时, 一元二次方程

$ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的实数根可写为

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ 的形式.}$$

当 $b^2 - 4ac \geq 0$ 时，方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的实数根可写为 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 的形式，这个式子叫做一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的 **求根公式**。

解一元二次方程时，把各系数直接代入求根公式，这种解一元二次方程的方法叫做公式法.

一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的解法

直接开平方法

配方法

公式法

3. 巩固落实

例 用公式法解方程 $5x^2 - 3x = x + 1$.

解：方程化为 $5x^2 - 4x - 1 = 0$.

$a = 5, b = -4, c = -1$.

$$b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 5 \times (-1) = 36 > 0.$$

方程有两个不相等实数根

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{36}}{2 \times 5} = \frac{4 \pm 6}{10}.$$

即： $x_1 = 1, x_2 = -\frac{1}{5}.$

用公式法解一元二次方程的一般步骤

- (1) 化 “一般形式” .
- (2) 确定 a, b, c (注意符号) .
- (3) 计算 $b^2 - 4ac$ 的值.
- (4) 当 $b^2 - 4ac \geq 0$ 时, 将 a, b, c 及 $b^2 - 4ac$ 代入公式
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
求出方程的根;
当 $b^2 - 4ac < 0$ 时, 方程无实数根.
- (5) 结果化成最简形式.

公式法

$$\text{解: } 5x^2 - 4x - 1 = 0.$$

$$a = 5, b = -4, c = -1.$$

$$b^2 - 4ac = 36 > 0.$$

方程有两个不相等实数根

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{4 \pm 6}{10}.$$
$$x_1 = 1, x_2 = -\frac{1}{5}.$$

配方法

$$5x^2 - 4x = 1.$$

$$x^2 - \frac{4}{5}x = \frac{1}{5}.$$

$$x^2 - \frac{4}{5}x + \left(-\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{1}{5} + \left(-\frac{2}{5}\right)^2,$$

$$\left(x - \frac{2}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}.$$

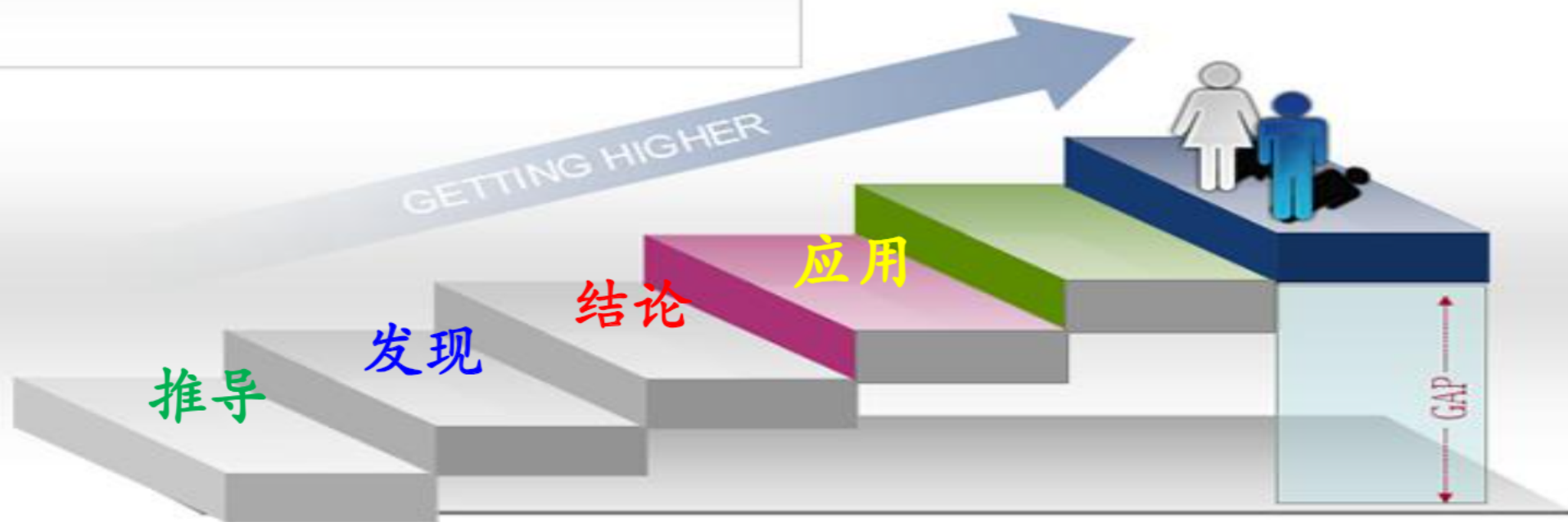
$$x - \frac{2}{5} = \pm \frac{3}{5},$$

$$x_1 = 1, x_2 = -\frac{1}{5}.$$

问题4 比较两种解法，能体会出为什么学习公式法吗？

- ①利用配方法可以推导出求根公式，配方是推导求根公式的中间过程.
- ②公式法则省去了配方的中间过程，直接利用了配方的结果.
- ③公式法的优点是操作简单，直接计算，是解一元二次方程的通法.

4. 课堂小结



5. 布置作业

用公式法解下列方程：

(1) $2x^2 + 3x - 3 = 0$;

(2) $x^2 + 5x + 7 = 3x + 11$.

国家中小学课程资源

同学们，再见！

